Квантовые волчки как примеры коммутирующих дифференциальных операторов

А.Б. Шабат, В.Э. Адлер, В.Г. Марихин

arXiv:1109.6770v1 [nlin.SI]

В работе рассматриваются квантовые аналоги волчков на алгебрах Ли $so(4)$ и $e(3)$ в представлении дифференциальными операторами.

Черноголовка, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 7 октября 2011

Паули и Бор квантуют волчок Томсона

План доклада

- ДО и волчки
- Коммутирование в главном
- Дифференциальные представления $so(4)$ и $e(3)$
- Схема квантования
- Примеры
- Разностные и матричные представления
- Спектр для волчка Эйлера

$\operatorname{ord} H : \operatorname{ord} K$	$so(4)$	$e(3)$
$2:2$	Шоттки–Манаков Стеклов	Клебш
$2:3$		Горячёв–Чаплыгин
$2:4$	М. Адлер–ван Мёрбеке* Соколов*	Ковалевская

* квантование найдено, по-видимому, впервые

Дифференциальные операторы и волчки

Полезно изучать коммутативные кольца ДО.

Одна независимая переменная: задача решена [1, 2]. Приложения в теории уравнений типа КдФ и КП: описание конечнозонных операторов (Новиков, Кричевер и др.), алгоритм проверки необходимых условий интегрируемости (Шабат и др.).

Две и более: возможны обобщения в разных направлениях. В этом случае задача о паре коммутирующих операторов

$$[\hat{H}, \hat{K}] = 0$$

поставлена недостаточно жёстко, нужны дополнительные ограничения. Кроме условий, диктуемых внутренней логикой задачи (например, коммутативность тройки операторов), имеет смысл выделять классы операторов, важные для приложений.

---

[1] I. Schur. Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke. *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.* ***4*** (1905) 2–8.

[2] J.L. Burchnall, T.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. *Proc. R. Soc. Lond. A* ***118*** (1928) 557–583.

Один такой класс связан с квантовыми волчками на $so(4)$ и $e(3)$.

➢ Оператор $\hat{H}$ имеет весьма специальный вид:

$$\hat{H} = a(\overset{4}{x})D_x^2 + f(\overset{2}{x},\overset{2}{y})D_xD_y + b(\overset{4}{y})D_y^2 + \dots,$$

где a, b, f многочлены, числа над аргументами указывают степень, многоточие обозначает младшие члены также специального вида (многочлены, но в случае $e(3)$ есть деление на $x - y$).

Такая структура следует из того, что в генераторах алгебры Ли гамильтониан квадратичен, например, на $so(4)$ имеем

$$\hat{H} = (\hat{U}, A\hat{U}) + (\hat{V}, B\hat{V}) + (\hat{U}, F\hat{V}) + (\vec{c}, \hat{U}) + (\vec{d}, \hat{V})$$

и при переходе к дифференциальному представлению генераторы U, V заменяются ДО первого порядка с квадратичными коэффициентами (см. формулы (4), (6) ниже).

➢ Оператор $\hat{K}$: в рассматриваемых примерах порядок не превосходит 4, степень коэффициентов не превосходит 8.

➢ Преимущества подхода с ДО в этой задаче:

— упрощается вопрос об упорядочении в операторной алгебре;

— автоматически учитываются операторы Казимира. Они входят в $\hat{H}, \hat{K}$ как независимые параметры и расщепление коммутационного соотношения по ним облегчает анализ.

➢ **Наша цель:** пока просто проанализировать известные примеры. В частности, они подводят к следующему наблюдению, важному в вопросе о разделении переменных [3]. Пока непонятно, как доказать это свойство в общем виде, исходя из существования коммутирующего оператора $\hat{K}$ произвольного порядка. Альтернатива — тест Пенлеве.

Гипотеза. Простейшим необходимым условием интегрируемости служит факторизуемость дискриминанта главной части $\hat{H}$:

$$f(x,y)^2 - 4a(x)b(y) = w(x,y)\tilde{w}(x,y) \tag{1}$$

с некоторыми многочленами $w, \tilde{w}$.

---

[3] V.G. Marikhin, V.V. Sokolov. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve. *Reg. and Chaot. Dyn.* ***10:1*** (2005) 59–70.

Коммутирование в главном

Обсудим простые необходимые условия коммутативности

$$[A,B]=0,\quad A=\sum a_\alpha D^\alpha,\quad B=\sum b_\beta D^\beta,\quad D=(D_1,\dots,D_N).$$

Пусть A_ξ обозначает производную по D, то есть $A_\xi=(A_{D_1},\dots,A_{D_N})$. Следующее понятие приводит к стандартной скобке Пуассона–Дарбу.

Определение. Пусть C^0 обозначает старшие члены оператора C. Операторы A и B (порядков m и n) коммутируют в главном, если старшие члены в их коммутаторе (имеющие порядок $m+n-1$) сокращаются:

$$[A,B]^0=[A^0,B^0]^0=(A^0_\xi,B^0_x)-(B^0_\xi,A^0_x)=\{A^0,B^0\}=0. \tag{2}$$

В задаче о классических волчках вместо коммутирующих ДО рассматриваются инволютивные гамильтонианы, полиномиальные по импульсам. При этом условия коммутирования в главном совпадают в классическом и квантовом случаях.

---

[4] Р.А. Габиев, А.Б. Шабат. О дифференциальных операторах коммутирующих в главном. *Теор. и мат. физика* (2011).

Пример ($n = m = 2$, $N = 2$). Условие коммутативности в главном даёт

$$\begin{gathered} A = \frac{1}{u} D_x D_y, \quad B = vA + \frac{1}{2}(D_y^2 - D_x^2); \\ [A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \end{gathered} \tag{3}$$

Напомним, что при $N = 2$ сопряжение $p^{-1}(x, y) A p(x, y)$ и замена

$$\tilde{x} = \varphi(x, y), \quad \tilde{y} = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad D_x = \varphi_x \tilde{D}_x + \psi_x \tilde{D}_y, \quad D_y = \varphi_y \tilde{D}_x + \psi_y \tilde{D}_y$$

приводят общий оператор A второго порядка к каноническому виду

$$A = a(x, y) D_x D_y + f(x, y) D_x + g(x, y) D_y.$$

При этом для $B = b_1 D_x^2 + b_2 D_x D_y + b_3 D_y^2 + \dots$ из необходимых условий (2) следует, что $b_1 = b_1(x)$, $b_3 = b_3(y)$. Дополнительная замена $\tilde{x} = X(x)$, $\tilde{y} = Y(y)$ сохраняет вид A и позволяет сделать эти коэффициенты постоянными. Далее, условия (2) приводят к формулам (3), которые оказываются и достаточными для равенства $[A, B] = 0$.

Однако, в более сложных примерах подобные замены не позволяют решить задачу и только безнадёжно портят коэффициенты.

Дифференциальные представления

$\boldsymbol{so(3)}$ Скобка Ли–Пуассона и функция Казимира:

$$\{U_i, U_j\} = \mathbf{i}\,\varepsilon_{ijk} U_k, \quad (U, U) = s_1^2, \quad U := (U_1, U_2, U_3).$$

Координаты Дарбу можно вводить по разному, мы используем следующие (преимущество — полиномиальность):

$$U_1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)p_1 + s_1 x, \quad U_2 = -\frac{\mathbf{i}}{2}(x^2 + 1)p_1 + \mathbf{i}\,s_1 x,$$
$$U_3 = -xp_1 + s_1.$$

Квантование = переход к операторной алгебре

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = \mathbf{i}\,\varepsilon_{ijk} \hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = j_1(j_1 + 1).$$

Представление дифференциальными операторами:

$$\hat{U}_1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)D_x + j_1 x, \quad \hat{U}_2 = -\frac{\mathbf{i}}{2}(x^2 + 1)D_x + \mathbf{i}\,j_1 x, \qquad (4)$$
$$\hat{U}_3 = -xD_x + j_1.$$

$so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$ Эта алгебра Ли реализуется как прямая сумма $so(3)$ с дублем, в котором сделаны переобозначения

$$U \to V, \quad x \to y, \quad p_1 \to p_2, \quad s_1 \to s_2, \quad \hat{U} \to \hat{V}, \quad D_x \to D_y, \quad j_1 \to j_2.$$

Волчки на $so(4)$ определяются гамильтонианом общего вида

$$\hat{H} = (U, AU) + (V, BV) + (U, FV) + (\vec{c}, U) + (\vec{d}, V). \tag{5}$$

Матрицы A и B можно считать диагональными без потери общности. В представлении (4) возникает ДО специального вида

$$\begin{aligned}\hat{H}_D = {} & a(x)D_x^2 + f(x,y)D_xD_y + b(y)D_y^2 \\ & - \left(\frac{2j_1-1}{2}a'(x) + 2c(x) + j_2 f_y(x,y)\right)D_x \\ & - \left(\frac{2j_2-1}{2}b'(y) + 2d(y) + j_1 f_x(x,y)\right)D_y \\ & + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}a''(x) + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}b''(y) \\ & + 2j_1c'(x) + 2j_2d'(y) + j_1j_2f_{xy}(x,y) + \kappa,\end{aligned} \tag{6}$$

где κ произвольная постоянная и

$$a(x) = a_0(x^4+1) + a_2x^2, \quad b(y) = b_0(y^4+1) + b_2y^2,$$
$$c(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0, \quad d(y) = d_2y^2 + d_1y + d_0,$$
$$f(x,y) = f_{22}x^2y^2 + \cdots + f_{00}.$$

Далее часто используются следующие **обозначения**:

$$\begin{aligned} W(\lambda,\mu,\nu;x,y) &= \lambda(x^2-1)(y^2-1) - \mu(x^2+1)(y^2+1) + 4\nu xy, \\ R(\lambda,\mu,\nu;x) &= W(\lambda,\mu,\nu,x,x) = (\lambda-\mu)(x^4+1) + 2(2\nu-\lambda-\mu)x^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Они диктуются формулами пересчёта из (6) в (5):

$$A = \operatorname{diag}(2a_0, -2a_0, a_2) + \alpha I, \quad B = \operatorname{diag}(2b_0, -2b_0, b_2) + \beta I,$$
$$\vec{c} = 2(c_2 - c_0, -\mathbf{i}(c_2 + c_0), c_1), \quad \vec{d} = 2(d_2 - d_0, -\mathbf{i}(d_2 + d_0), d_1),$$
$$F = \begin{pmatrix} f_{00} - f_{02} - f_{20} + f_{22} & \mathbf{i}(f_{00} + f_{02} - f_{20} - f_{22} & f_{21} - f_{01} \\ \mathbf{i}(f_{00} - f_{02} + f_{20} - f_{22}) & -f_{00} - f_{02} - f_{20} - f_{22} & -\mathbf{i}(f_{21} + f_{01}) \\ f_{12} - f_{10} & -\mathbf{i}(f_{12} + f_{10}) & f_{11} \end{pmatrix},$$
$$3\kappa = (3\alpha + a_2)j_1(j_1+1) + (3\beta + b_2)j_2(j_2+1)$$

с произвольными постоянными α, β.

$e(3)$ Скобка Ли–Пуассона:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Функции Казимира:

$$(M, \gamma) = l, \quad (\gamma, \gamma) = a^2.$$

Операторная алгебра:

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = \mathbf{i}\, \varepsilon_{ijk} M_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{\gamma}_j] = \mathbf{i}\, \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad [\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j] = 0.$$

Операторы Казимира остаются классическими:

$$(\hat{M}, \hat{\gamma}) = l, \quad (\hat{\gamma}, \hat{\gamma}) = a^2.$$

Представление ДО:

$$\begin{gathered}
\hat{M}_1 = \frac{1}{2}(1 - x^2) D_x + \frac{1}{2}(1 - y^2) D_y + \frac{l}{2a}(x - y), \\
\hat{M}_2 = \frac{\mathbf{i}}{2}(1 + x^2) D_x + \frac{\mathbf{i}}{2}(1 + y^2) D_y - \mathbf{i}\, \frac{l}{2a}(x - y), \\
\hat{M}_3 = x D_x + y D_y, \\
\hat{\gamma}_1 = a \frac{1 - xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_2 = \mathbf{i}\, a \frac{1 + xy}{x - y}, \quad \hat{\gamma}_3 = a \frac{x + y}{x - y}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Схема квантования

$$
\begin{tikzcd}
\{H,K\}=0 \arrow[rrr, "\text{квантование на алгебре Ли}"] \arrow[d, "R^*"'] & & & {[\hat H,\hat K]=0} \arrow[d, "\hat R^*"] \\
\{H_D,K_D\}=0 \arrow[rrr, "\text{квантование в переменных Дарбу}"] & & & {[\hat H_D,\hat K_D]=0}
\end{tikzcd}
$$

где

R — представление скобки Ли–Пуассона в переменных Дарбу;
$\hat R$ — представление алгебры Ли дифференциальными операторами;
D — образ при пулбаке, то есть $H_D = R^*(H) = H \circ R$.

Горизонтальные стрелки:

переход от скобки Ли–Пуассона к коммутатору на алгебре Ли;
переход от скобки Пуассона–Дарбу к алгебре Гейзенберга

$$\{p_i, x_i\} = \delta_{ij} \quad \to \quad [D_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}.$$

Оба перехода достигаются подходящим упорядочением в мономах гамильтонианов H, K. Это равносильно добавлению младших членов (“квантовых поправок”). То, что условия **коммутирования в главном** совпадают в классическом и квантовом случаях, следует из непрерывного предела.

В случае $so(4)$ постоянная Планка вводится растяжением: коммутационные соотношения и представление ДО в каждой копии $so(3)$ заменяются на

$$[\hat{U}_i, \hat{U}_j] = \mathbf{i}\,\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{U}_k, \quad (\hat{U}, \hat{U}) = \hbar^2 j_1(j_1+1),$$

$$\hat{U}_1 = \hbar\Big(-\frac{1}{2}(x^2-1)D_x + j_1 x\Big), \quad \hat{U}_2 = \hbar\Big(-\frac{\mathbf{i}}{2}(x^2+1)D_x + \mathbf{i}\,j_1 x\Big),$$

$$\hat{U}_3 = \hbar(-xD_x + j_1).$$

Классический предел для любого квантового оператора $\hat{A}$ вычисляется по формуле

$$A = \lim_{\hbar\to 0} e^{-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}(p_1x+p_2y)}\left(\hat{A}\,e^{\frac{\mathbf{i}}{\hbar}(p_1x+p_2y)}\right)\Big|_{j_i=\frac{s_i}{\hbar}},$$

при этом коммутатор переходит в скобку Ли–Пуассона, а операторное представление переходит в представление через переменные Дарбу.

Замечание. Операторы Казимира $\hbar^2 j_i(j_i+1)$ имеют квантовую природу. При переходе к пределу $\hbar\to 0$ мы вводим конечные классические величины $s_i = \hbar j_i$. Однако, если речь идёт о спинах, то величины j_i принимают целые/полуцелые значения и ограничены, а значит $s_i \to 0$, что согласуется с тезисом о том, что спин — чисто квантовая величина.

В случае $\boldsymbol{e(3)}$ постоянная Планка вводится следующим образом:

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = \mathbf{i}\,\hbar\varepsilon_{ijk}M_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{\gamma}_j] = \mathbf{i}\,\hbar\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad [\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j] = 0,$$

операторное представление заменяется на

$$\hat{M}_1 = \hbar\Big(\frac{1}{2}(1-x^2)D_x + \frac{1}{2}(1-y^2)D_y\Big) + \frac{l}{2a}(x-y),$$
$$\hat{M}_2 = \hbar\Big(\frac{\mathbf{i}}{2}(1+x^2)D_x + \frac{\mathbf{i}}{2}(1+y^2)D_y\Big) - \mathbf{i}\,\frac{l}{2a}(x-y),$$
$$\hat{M}_3 = \hbar(xD_x + yD_y),$$
$$\hat{\gamma}_1 = a\frac{1-xy}{x-y}, \quad \hat{\gamma}_2 = \mathbf{i}\,a\frac{1+xy}{x-y}, \quad \hat{\gamma}_3 = a\frac{x+y}{x-y}.$$

Предельный переход аналогичен случаю $so(4)$:

$$A = \lim_{\hbar\to 0} e^{-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}(p_1x+p_2y)}\left(\hat{A}\,e^{\frac{\mathbf{i}}{\hbar}(p_1x+p_2y)}\right),$$

но операторы Казимира являются чисто классическими.


Волчок Шоттки–Манакова $2:2\ so(4)$

Коммутирующие операторы

$$\hat{H} = -\alpha_1^2\hat{U}_1^2 - \alpha_2^2\hat{U}_2^2 - \alpha_3^2\hat{U}_3^2 - \alpha_1^2\hat{V}_1^2 - \alpha_2^2\hat{V}_2^2 - \alpha_3^2\hat{V}_3^2$$
$$+ 2\alpha_2\alpha_3\hat{U}_1\hat{V}_1 + 2\alpha_3\alpha_1\hat{U}_2\hat{V}_2 + 2\alpha_1\alpha_2\hat{U}_3\hat{V}_3,$$
$$\hat{K} = \alpha_1\hat{U}_1\hat{V}_1 + \alpha_2\hat{U}_2\hat{V}_2 + \alpha_3\hat{U}_3\hat{V}_3$$

получаются из классических гамильтонианов простой заменой $U \to \hat{U}$, $V \to \hat{V}$, так как в данном примере нет проблемы упорядочения (в каждом мономе только коммутирующие переменные).

[5] F. Schottky. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen. *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin* **XIII** (1891) 227–232.

[6] С.В. Манаков. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела. *Функц. анализ* ***10:4*** (1976) 93–94.

Применяя отображение $\hat{R}$, получаем коммутирующие ДО:

$$
\begin{aligned}
4\hat{H}_D = {} & r(x)D_x^2 + 2zD_xD_y + r(y)D_y^2 \\
& - \left(\frac{2j_1-1}{2}r'(x) + 2j_2z_y\right)D_x - \left(\frac{2j_2-1}{2}r'(y) + 2j_1z_x\right)D_y \\
& + 2j_1j_2z_{xy} + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r''(y) \\
& - \frac{4}{3}(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1))(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2), \\
4\hat{K}_D = {} & wD_xD_y - j_2w_yD_x - j_1w_xD_y + j_1j_2w_{xy},
\end{aligned}
$$

где, с использованием обозначений (7),

$$
\begin{aligned}
& r(x) = -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; x), \\
& z = z(x,y) = W(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2; x, y), \\
& w = w(x,y) = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y).
\end{aligned}
$$

Последний член в $\hat{H}_D$ не влияет на коммутативность ($\sim$ сдвиг энергии основного состояния, κ в формуле (6)).

Эти же операторы получаются и при другом обходе диаграммы. Сначала применим R и перейдём к переменным Дарбу. Это даёт

$$\begin{aligned}
4H_D &= r(x)p_1^2 + 2zp_1p_2 + r(y)p_2^2 \\
&\quad - (s_1r'(x) + 2s_2z_y)p_1 - (s_2r'(y) + 2s_1z_x)p_2 \\
&\quad + 2s_1s_2z_{xy} + \frac{s_1^2}{3}r''(x) + \frac{s_2^2}{3}r''(y) - \frac{4}{3}(s_1^2 + s_2^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \\
4K_D &= wp_1p_2 - s_2w_yp_1 - s_1w_xp_2 + s_1s_2w_{xy},
\end{aligned}$$

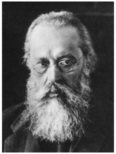
где r, z, w те же, что и выше. Далее, делается замена p_i на D_{x_i} в квадратичных членах, а младшие берутся с неопределёнными коэффициентами (с сохранением степени по x, y). Коммутирующие ДО ищутся в виде

$$\hat{H}_D = r(x)D_x^2 + 2z(x,y)D_xD_y + r(y)D_y^2 + a(\overset{3}{x}, \overset{1}{y})D_x + b(\overset{1}{x}, \overset{3}{y})D_y + c(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}),$$

$$\hat{K}_D = w(x,y)D_xD_y + f(\overset{2}{x}, \overset{1}{y})D_x + g(\overset{1}{x}, \overset{2}{y})D_y + h(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}),$$

где r, z, w заданы, a, b, c, f, g, h неизвестны. Система довольно громоздкая, но при помощи компьютерной алгебры легко решается. Оба способа квантования оказываются эквивалентными, как и следовало ожидать.

С вычислительной точки зрения, в ситуации, когда требуется найти $\hat{K}$ по заданному $\hat{H}$, каждый способ имеет свои преимущества и недостатки. Использование генераторов алгебры Ли приводит к более простой системе уравнений на коэффициенты, но сложнее реализуется, из-за необходимости работать с некоммутативными переменными. Дифференциальное представление даёт более гибкий и универсальный язык, но приводит к более громоздким уравнениям.



Волчок Стеклова

Классические гамильтонианы имеют вид ($\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$)

$$H = -\alpha^2\left(\frac{1}{\alpha_1^2}U_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2}U_2^2 + \frac{1}{\alpha_3^2}U_3^2\right) + 2\alpha(\alpha_1 U_1 V_1 + \alpha_2 U_2 V_2 + \alpha_3 U_3 V_3),$$

$$K = 2\alpha\left(\frac{1}{\alpha_1}U_1V_1 + \frac{1}{\alpha_2}U_2V_2 + \frac{1}{\alpha_3}U_3V_3\right) - \alpha_1^2V_1^2 - \alpha_2^2V_2^2 - \alpha_3^2V_3^2.$$

Как и в предыдущем примере, проблемы упорядочения нет, и коммутирующие операторы получаются просто добавлением крышек к U, V.

[7] V.A. Stekloff. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remple par un liquide incompressible en sur les variations des latitudes. *Ann. de la fac. des Sci. de Toulouse, Ser. 3, v. 1* (1909).

В дифференциальном представлении получаем

$$4\hat{H}_D = r_1 D_x^2 + 2zD_xD_y - \left(\frac{2j_1-1}{2}r_1' + 2j_2z_y\right)D_x - 2j_1z_xD_y$$
$$+ 2j_1j_2z_{xy} + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r_1'' - \frac{4}{3}j_1(j_1+1)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2),$$
$$4\hat{K}_D = 2wD_xD_y + r_2D_y^2 - 2j_2w_yD_x - \left(\frac{2j_2-1}{2}r_2' + 2j_1w_x\right)D_y$$
$$+ 2j_1j_2w_{xy} + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r_2'' - \frac{4}{3}j_2(j_2+1)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

где

$$r_1 = r_1(x) = -R(\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_3^2\alpha_1^2, \alpha_1^2\alpha_2^2; x),$$
$$r_2 = r_2(y) = -R(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2; y),$$
$$z = z(x,y) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; x, y),$$
$$w = w(x,y) = W(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2; x, y).$$

Волчок Клебша

И здесь тоже нет проблемы упорядочения, квантовый волчок определяется гамильтонианами

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{M}_i^2 + \lambda_i \hat{\gamma}_i^2\right), \quad \hat{K} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i \hat{M}_i^2 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\hat{\gamma}_i^2\right), \quad \lambda = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

В представлении (8) имеем следующие коммутирующие ДО:

$$2\hat{H}_D = -(x-y)^2 D_x D_y + \frac{l}{a}(x-y)(D_x + D_y) + \frac{a^2 z}{(x-y)^2} + a^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

[8] A. Clebsch. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. *Math. Annalen* ***3*** (1870) 238–262.

$$
\begin{aligned}
8\hat{K}_D = {} & r(x)D_x^2 + 2zD_xD_y + r(y)D_y^2 \\
& + \Big(\frac{a-l}{2a}r'(x) + \frac{l}{a}z_y\Big)D_x + \Big(\frac{a+l}{2a}r'(y) - \frac{l}{a}z_x\Big)D_y \\
& + (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{l^2}{a^2}(x-y)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{l}{a}(x^2 - y^2) + a^2\frac{r(x)r(y) - z^2}{(x-y)^4},
\end{aligned}
$$

где

$$
r(x) = R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x), \quad z = z(x,y) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; x, y).
$$

Отметим, что тождество (1) в данном случае принимает вид

$$
\begin{aligned}
z^2 - r(x)r(y) = {} & 4(x-y)^4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \\
& + 4(x-y)^2 W(\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2; x, y),
\end{aligned}
$$

поэтому в последнем слагаемом $\hat{K}_D$ происходит частичное сокращение.

Случай Горячёва–Чаплыгина $2:3\ e(3)$

Операторы (в $\hat{K}$ важно упорядочение)

$$\hat{H} = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 4\hat{M}_3^2 - \hat{\gamma}_1 + c\hat{M}_3,$$
$$\hat{K} = 4(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2)\hat{M}_3 + 2\hat{M}_1\hat{\gamma}_3 - 4c\hat{M}_3^2 + (1-c^2)\hat{M}_3 + c\hat{\gamma}_1 + \mathbf{i}\,\hat{\gamma}_2$$

удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{H}, \hat{K}] = 4\,\mathbf{i}\,l\hat{M}_2, \quad l = (\hat{\gamma}, \hat{M}).$$

Таким образом, на поверхности уровня оператора Казимира $l = 0$ имеем интегрируемый случай.

---

[9] Д.Н. Горячев. О движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$. *Матем. сб.* ***21:3*** (1900) 431–438.

[10] И.В. Комаров. Волчок Горячева–Чаплыгина в квантовой механике. *Теор. и мат. физика* ***50:3*** (1982) 402–409.

В представлении (8) получаем ДО

$$\hat{H}_D = 3x^2 D_x^2 - (x^2 - 8xy + y^2) D_x D_y + 3y^2 D_y^2 \\ + (c+3)(xD_x + yD_y) + a\frac{xy-1}{x-y},$$

$$-\hat{K}_D - 4(\frac{c}{3}+1)\hat{H}_D \\ = 4x^3 D_x^3 + 4(x^2+xy+y^2)(xD_x+yD_y)D_x D_y + 4y^3 D_y^3 \\ + (\frac{c}{3}+3)(4(x-y)^2 D_x D_y - (c+3)(xD_x+yD_y)) \\ + \frac{a}{x-y}\Big((x+y)((x^2-1)D_x + (y^2-1)D_y) - (\frac{c}{3}+5)xy + \frac{c}{3}+3\Big).$$

Волчок Адлера–ван Мёрбеке $2:4\ so(4)$

Классические гамильтонианы имеют следующий вид (параметры связаны соотношением $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$):

$$H=\sum_{i=1}^{3}\Big(-9\lambda_j^2\lambda_k^2U_i^2+6\lambda_j\lambda_k(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_i)U_iV_i + \lambda_j\lambda_k(4\lambda_i^2-\lambda_j\lambda_k)V_i^2\Big),$$

$$K=3\sum_{i,j}\lambda_j(\lambda_i-\lambda_j)U_iV_iV_j^2+\sum_i(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)U_iV_i^3 - 9\sum_l U_l^2\sum_i\lambda_j\lambda_kU_iV_i+\frac{3}{2}\sum_l U_l^2\sum_i(3\lambda_i^2-\lambda_j^2-\lambda_k^2)V_i^2.$$

[11] M. Adler, P. van Moerbeke. A new geodesic flow on $SO(4)$. Probability, statistical mechanics and number theory. *Adv. Math. Suppl. Stud* ***9*** (1986) 81–96.

[12] A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body. *Comm. in Math. Phys.* ***105:3*** (1986) 461–472.

Квантовый гамильтониан $\hat{H}$ получается из H добавлением крышек. Однако, в $\hat{K}$ имеются мономы с некоммутирующими генераторами и возникает проблема упорядочения. Прямыми вычислениями с неопределёнными коэффициентами для $\hat{K}$ найдено выражение

$$\begin{aligned}
\hat{K} = \sum_{i,j} \lambda_j(\lambda_i - \lambda_j)\big(\hat{U}_i\hat{V}_i\hat{V}_j^2 + \hat{U}_i\hat{V}_j\hat{V}_i\hat{V}_j + \hat{U}_i\hat{V}_j^2\hat{V}_i\big) \\
+ \sum_i (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)\hat{U}_i\hat{V}_i^3 - 9\Big(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{1}{3}\Big)\sum_i \lambda_j\lambda_k\hat{U}_i\hat{V}_i \\
+ \frac{3}{2}\sum_l \hat{U}_l^2 \sum_i (3\lambda_i^2 - \lambda_j^2 - \lambda_k^2)\hat{V}_i^2.
\end{aligned}$$

Оно отличается от K упорядочением в первой сумме и квантовой поправкой в третьей (напомним, что $\sum_l \hat{U}_l^2$ является функцией Казимира). Для корректного перехода к классическому пределу надо растянуть этот член:

$$\Big(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{1}{3}\Big)\sum_i \lambda_j\lambda_k\hat{U}_i\hat{V}_i \quad \to \quad \Big(\sum_l \hat{U}_l^2 + \frac{\hbar^2}{3}\Big)\sum_i \lambda_j\lambda_k\hat{U}_i\hat{V}_i,$$

в результате всё станет однородным по $\hbar$, и в пределе $\hbar \to 0$ возникнет классический гамильтониан K.

В дифференциальном представлении для $\hat{H}_D$ получаем выражение

$$\begin{aligned}
4\hat{H}_D &= r_1(x)D_x^2 + 2zD_xD_y + r_2(y)D_y^2 \\
&\quad - \Big(\frac{2j_1-1}{2}r_1'(x) + 2j_2z_y\Big)D_x - \Big(\frac{2j_2-1}{2}r_2'(y) + 2j_1z_x\Big)D_y \\
&\quad + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r_1''(x) + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r_2''(y) + 2j_1j_2z_{xy} \\
&\quad - \frac{4}{3}(9j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1))(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r_1(x) &= -9R(\lambda_2^2\lambda_3^2, \lambda_3^2\lambda_1^2, \lambda_1^2\lambda_2^2, x), \\
r_2(x) &= \frac{1}{9}r_1(x) + 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x), \\
z &= z(x,y) = 3W(\mu_1, \mu_2, \mu_3, x, y), \quad \mu_i = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2).
\end{aligned}$$

Оператор $\hat{K}_D$ имеет достаточно простую структуру

$$\begin{aligned}4\hat{K}_D = g^2 D_x D_y^3 &+ c_1 g g_y D_x D_y^2 + c_2 g g_x D_y^3 \\ &+ (c_3 g g_{yy} + c_4 g_y^2) D_x D_y + (c_5 g_y g_x + c_6 g g_{xy}) D_y^2 \\ &+ (c_7 g g_{yyy} + c_8 g_y g_{yy}) D_x + (c_9 g_{yy} g_x + c_{10} g_y g_{xy} + c_{11} g g_{xyy}) D_y \\ &+ c_{12} g_{yyy} g_x + c_{13} g_{yy} g_{xy} + c_{14} g_y g_{xyy} + c_{15} g g_{xyyy},\end{aligned}$$

хотя и с громоздкими коэффициентами. Здесь g обозначает многочлен

$$g = (\lambda_1 - \lambda_2)(xy^3 + 1) + 3\lambda_3 (x + y) y,$$

связанный с коэффициентами $\hat{H}_D$ соотношением

$$z^2 - r_1(x) r_2(y) = 36 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) g \tilde{g},$$

где $\tilde{g} = (\lambda_1 - \lambda_2) x (x + y) - \lambda_3 (x^3 y + 1)$. Коэффициенты c_i, в свою очередь, являются многочленами от параметров j_1, j_2:

$$c_1 = -2(j_2 - 1), \quad \dots \quad c_{15} = \frac{j_1 j_2}{6}(9j_1^2 - 3j_1 j_2 - j_2^2 + 12 j_1 - 6 j_2 + 7).$$

Волчок Соколова

В этом примере удобно использовать обозначения

$$m_i = U_i + V_i, \quad n_i = U_i - V_i.$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + m_3^2 + m_3(\alpha n_1 + \beta n_2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)n_3^2,$$

дополнительный интеграл четвёртой степени

$$K = m_3^2\bigl(2H - m_3^2 + (\beta m_1 - \alpha m_2)^2 + (\alpha n_1 + \beta n_2)^2\bigr)$$
$$+2m_3\bigl(\alpha m_1 + \beta m_2 - (\alpha^2 + \beta^2)n_3\bigr)(m_1 n_1 + m_2 n_2).$$

[13] V.V. Sokolov. Generalized Kowalewski top: new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$. *In: "Kowalevski property", ed. V.B. Kuznetsov, CRM Proceedings and Lecture Notes,* ***32*** (2002) 307–313. ArXiV: nlin.SI/0110022, 2001.

Квантовый гамильтониан получается при симметризации некоммутативных мономов:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{m}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 + [\hat{m}_3, \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2]^+ - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\hat{n}_3^2,$$

где

$$[a, b]^+ = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Оператор $\hat{K}$ также получается при симметризации со специально подобранными весовыми коэффициентами. Следует отметить, что в алгебре $so(4)$ имеются однородные многочлены, тождественно равные нулю по модулю коммутационных соотношений, поэтому запись оператора $\hat{K}$ неединственна. Приведём один из возможных вариантов. Введём обозначения

$$\begin{aligned} A_{a,b,c}(m, f) = amf^2m + b[m^2, f^2]^+ + c[f, mfm]^+ \\ +(1 - a - b - c)fm^2f, \\ B(m, f, g) = mfg + gfm, \end{aligned}$$

тогда оператор

$$
\begin{aligned}
\hat{K} = {} & A_{\frac{1}{2},0,\frac{3}{4}}(\hat{m}_3, \hat{m}_1) + A_{\frac{1}{2},0,\frac{3}{4}}(\hat{m}_3, \hat{m}_2) - (\alpha^2+\beta^2)\hat{m}_3^2\hat{n}_3^2 \\
& + A_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},1}(\hat{m}_3, \beta\hat{m}_1 - \alpha\hat{m}_2) + A_{-\frac{3}{4},-1,\frac{7}{2}}(\hat{m}_3, \hat{m}_3 + \alpha\hat{n}_1 + \beta\hat{n}_2) \\
& + B(\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2 - (\alpha^2+\beta^2)\hat{n}_3, \hat{m}_1\hat{n}_1 + \hat{m}_2\hat{n}_2), \\
& - \frac{1}{2}[\hat{m}_3\hat{n}_3, [\hat{m}_3, \alpha\hat{m}_1 + \beta\hat{m}_2]]
\end{aligned}
$$

коммутирует с $\hat{H}$ и совпадает с K при переходе к коммутирующим переменным.

Представление $so(4)$ в этом примере удобно слегка изменить, сделав дополнительно замену $y \to -y$, $D_y \to -D_y$, после чего ответ становится симметричным относительно x, y. Введём обозначения (параметры α, β, вообще говоря, комплексные)

$$
\begin{gathered}
\xi_1 = \alpha + \mathbf{i}\,\beta, \quad \xi_2 = -\alpha + \mathbf{i}\,\beta, \quad r(x) = x(\xi_1 x + 1)(x + \xi_2), \\
z = z(x,y) = \xi_1 xy(x+y) + (x+y)^2 + 2(1 - \xi_1\xi_2)xy + \xi_2(x+y),
\end{gathered}
$$

тогда $\hat{H}$ записывается в виде

$$\begin{aligned}2\hat{H}_D = r(x)D_x^2 + zD_xD_y + r(y)D_y^2 \\ - \left(\frac{2j_1-1}{2}r'(x) + j_2z_y\right)D_x - \left(\frac{2j_2-1}{2}r'(y) + j_1z_x\right)D_y \\ + \frac{j_1(2j_1-1)}{6}r''(x) + \frac{j_2(2j_2-1)}{6}r''(y) + j_1j_2z_{xy} \\ + \frac{1}{3}(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1))(\xi_1\xi_2 + 4)\end{aligned}$$

(в этом примере $\deg r = 3$ из-за того, что в формуле (5) матрицы A, B недиагональны). Второй оператор имеет слишком громоздкий вид, выпишем только старшие члены:

$$\begin{aligned}\hat{K}_D = w^2(xD_x + yD_y)^2D_xD_y - 2j_2x^2ww_yD_x^3 - 2j_1y^2ww_xD_y^3 \\ - 2xw((j_1-1)xw_x + (j_1+j_2-1)w + (2j_2-1)yw_y)D_x^2D_y \\ - 2yw((2j_1-1)xw_x + (j_1+j_2-1)w + (j_2-1)yw_y)D_x^2D_y + \dots,\end{aligned}$$

где $w = \xi_1xy + x + y + \xi_2$.

Волчок Ковалевской

Классический волчок определяется гамильтонианами

$$2H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \gamma_1, \quad K = k_+ k_-,$$

где обозначено

$$k_\pm = (M_1 \pm \mathbf{i}\, M_2)^2 + \gamma_1 \pm \mathbf{i}\, \gamma_2.$$

Квантовая версия имеет вид

$$2\hat{H} = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 2\hat{M}_3^2 - \hat{\gamma}_1, \quad 2\hat{K} = \hat{k}_+ \hat{k}_- + \hat{k}_- \hat{k}_+ + 8(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2),$$

где

$$\hat{k}_\pm = (\hat{M}_1 \pm \mathbf{i}\, \hat{M}_2)^2 + \hat{\gamma}_1 \pm \mathbf{i}\, \hat{\gamma}_2.$$

[14] S.V. Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.* ***12:1*** (1889) 177–232.

[15] O. Laporte. Note on Kowalewski's top in quantum mechanics. *Phys. Rev.* ***43*** (1933) 548–551.

[16] И.В. Комаров, В.Б. Кузнецов. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской. *Теор. Мат. Физ.* ***73:3*** (1987) 335–347.

[17] I.V. Komarov. Remarks on Kowalevski's top. *J. Phys. A* ***34*** (2001) 2111–2120.

Переход к дифференциальному представлению даёт следующую коммутирующую пару:

$$2\hat{H}_D = x^2 D_x^2 + (4xy - x^2 - y^2) D_x D_y + y^2 D_y^2$$
$$+ \frac{1}{a}((a+l)x - ly)D_x + \frac{1}{a}(lx + (a-l)y)D_y + a\frac{xy-1}{x-y},$$
$$\hat{K}_D = \left[f^2 - \frac{2axy}{x-y}, g^2 + \frac{2a}{x-y}\right]^+ + 4[f, gfg]^+ - 2[fg, gf]^+ - 2[f^2, g^2]^+,$$

где $[a,b]^+ = \frac{1}{2}(ab + ba)$ и

$$f = x^2 D_x + y^2 D_y - \frac{l}{a}(x-y), \quad g = D_x + D_y.$$

Замечание. Имеется однопараметрическое обобщение с линейными членами (гиростат Ковалевской):

$$2\hat{H} = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + 2\hat{M}_3^2 - \hat{\gamma}_1 + c\hat{M}_3,$$
$$\hat{K} = \frac{1}{2}(\hat{k}_+\hat{k}_- + \hat{k}_-\hat{k}_+) + 4(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2) - 2c(\hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2)\hat{M}_3$$
$$+2c^2\hat{M}_3^2 + c(c^2+1)\hat{M}_3 - 2c\hat{M}_1\hat{\gamma}_3 - c^2\hat{\gamma}_1 - \mathbf{i}\, c\hat{\gamma}_2.$$

Разностные и матричные представления

Поясним связь дифференциального представления (4) и известного матричного представления [18, стр. 113]

$$\hat{U}_1 \pm \mathbf{i}\,\hat{U}_2 = \hat{U}_\pm, \quad \hat{U}_3|m,j\rangle = m|m,j\rangle,$$
$$\hat{U}_+|m,j\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|m+1,j\rangle,$$
$$\hat{U}_-|m,j\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|m-1,j\rangle.$$

Физическому случаю отвечают орбиты $j = \mathrm{const}$, такие что j, m целые или полуцелые одновременно и m принимает значения от $-j$ до j, что отвечает матрицам конечного размера $(2j+1)\times(2j+1)$. Формально, от этих ограничений можно отказаться и рассматривать бесконечные трёхдиагональные матрицы, интерпретируемые как разностные операторы

$$a(m)T_m + b(m) + c(m)T_m^{-1},$$

где $T_m : m \mapsto m+1$ оператор сдвига (единицы на поддиагонали).

---

[18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика. 4-е изд., М.: Наука, 1989.

От корней можно избавиться сопряжением $\hat{A} \to f^{-1}\hat{A}f$, что даёт представление $so(3)$ в операторах сдвига

$$\hat{U}_1 = -\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1},$$
$$\hat{U}_2 = -\mathbf{i}\Big(\frac{1}{4}(m-j)(m+j+1)T_m + T_m^{-1}\Big), \quad \hat{U}_3 = m.$$

Другое разностное представление можно получить напрямую из (4), делая замену (‘‘преобразование Фурье’’), не меняющую алгебру Гейзенберга:

$$D_x \to mT_m, \quad x \to T_m^{-1}, \quad [D_x, x] = 1 \ \to \ [mT_m, T_m^{-1}] = 1.$$

Это даёт операторы

$$\hat{U}_1 = \frac{m}{2}T_m + \left(j+1-\frac{m}{2}\right)T_m^{-1},$$
$$\hat{U}_2 = -\mathbf{i}\,\frac{m}{2}T_m + \mathbf{i}\left(j+1-\frac{m}{2}\right)T_m^{-1}, \quad \hat{U}_3 = j-m+1.$$

Можно проверить, что оба представления эквивалентны, с точностью до линейного преобразования из $SO(3)$ и сопряжения оператором $g(m)T^{-j-1}$, где $g(m+2)/g(m+1) = 2j-m$.

Волновые функции

Введём волновую функцию $|m,j\rangle = x^{j-m}$, тогда представление (4) имеет в этом базисе следующие матричные элементы:

$$\begin{gathered}\hat{U}_1 \pm \mathbf{i}\,\hat{U}_2 = \hat{U}_\pm, \quad \hat{U}_3|m,j\rangle = m|m,j\rangle, \\ \hat{U}_+|m,j\rangle = (j-m)|m+1,j\rangle, \quad \hat{U}_-|m,j\rangle = (j+m)|m-1,j\rangle.\end{gathered} \tag{9}$$

Условие, что $j-m$ целое, следует из требования однозначности базисной функции x^{j-m}. Если есть симметрия по обращению времени $m \to -m$, то и $j+m$ должно быть целым, тогда j,m целые/полуцелые одновременно. Из вида матричных элементов следует, что $m = -j,\ldots,j$, при этом условие $j > 0$ следует из требования аналитичности базисной функции. Из её вида также следует, что волновая функция на орбите $j = \mathrm{const}$ есть полином степени $2j$:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} C(m,j)\,|m,j\rangle, \quad H\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle.$$

В качестве приложения, рассмотрим далее спектр волчка Эйлера в этом представлении.

Волновая функция и спектральная задача на $so(4)$ выглядят аналогично:

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_1=-j_2}^{j_2} C(m_1, m_2; j_1, j_2) \, |m_1, m_2, j_1, j_2\rangle, \quad H \, |\psi\rangle = \lambda \, |\psi\rangle.$$

В дифференциальном представлении, базисная волновая функция на $so(4)$ выбирается в виде $|m_1, m_2, j_1, j_2\rangle = x^{j_1 - m_1} y^{j_2 - m_2}$. Тогда общая волновая функция — произвольный полином степени $2j_1$ по x и $2j_2$ по y.

Спектр для волчка Эйлера $so(3)$

Гамильтониан и оператор Казимира имеют вид

$$\hat{H} = \alpha_1 \hat{U}_1^2 + \alpha_2 \hat{U}_2^2 + \alpha_3 \hat{U}_3^2, \quad \hat{C} = \hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2.$$

Напомним, что квантование было проведено в [19]. Отметим работу [20], где рассматривалось представление в эллиптических координатах и установлено, что коэффициенты характеристического многочлена на данном уровне $j = s$ выражаются через так называемые эллиптические многочлены Бернулли.

В представлении ДО спектр определяется из условия полиномиальности собственных функций. Задача на собственные значения имеет вид

$$\hat{H}\psi_j^\lambda(x) = \lambda\psi_j^\lambda(x), \quad \hat{C}\psi_j^\lambda(x) = j(j+1)\psi_j^\lambda(x). \tag{10}$$

[19] H.A. Kramers, G.P. Ittmann. Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels. *Z. Physik* ***53*** (1929) 553–565; ***58*** (1929) 217–231; ***60*** (1930) 663–681.

[20] M-P. Grosset, A.P. Veselov. Lamé equation, quantum top and elliptic Bernoulli polynomials. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (Series 2)* ***51*** (2008) 635–650.

Сдвинув спектр, примем нормировку

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \xi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

и представим волновые функции в виде полинома от x

$$\psi_j^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{2j} C_j^\Lambda(k) x^k.$$

Тогда задача (10) в представлении (9) переписывается как рекуррентное соотношение

$$\frac{1}{4}(2j+1-k)(2j+2-k)C_j^\Lambda(k-2) + \left(\frac{1}{2}(j(j+1) - 3(j-k)^2)\xi - \Lambda\right)C_j^\Lambda(k) + \frac{1}{4}(k+1)(k+2)C_j^\Lambda(k+2) = 0$$

с граничными условиями на левом конце

$$C_j^\Lambda(-2) = C_j^\Lambda(-1) = 0, \quad C_j^\Lambda(0) = C_j^\Lambda(1) = 1.$$

Задача для чётных и нечётных полиномов разделяется:

если j целое, то граничное условие на правом конце имеет вид

$$C_j^\Lambda(2j+2)=0 \quad \text{для чётных полиномов}$$
$$C_j^\Lambda(2j+1)=0 \quad \text{для нечётных;}$$

если j полуцелое, то наоборот, на правом конце имеем

$$C_j^\Lambda(2j+1)=0 \quad \text{для чётных полиномов}$$
$$C_j^\Lambda(2j+2)=0 \quad \text{для нечётных.}$$

В итоге получаем следующий ответ: собственные значения $\hat{H}$ определяются корнями полинома от Λ

$$P_j(\Lambda)=C_j^\Lambda(2j+1)C_j^\Lambda(2j+2), \quad \deg P_j(\Lambda)=2j+1.$$

Они легко вычисляются по рекуррентным формулам при любом j. Выпишем явно несколько $P_j(\Lambda)$, нормированных так, чтобы коэффициент при старшей степени Λ^{2j+1} был равен 1:

$$
\begin{aligned}
&P_0(\Lambda) = \Lambda,\\
&P_{1/2}(\Lambda) = \Lambda^2,\\
&P_1(\Lambda) = \frac{1}{4}(\Lambda - \xi)(2\Lambda + \xi + 1)(2\Lambda + \xi - 1),\\
&P_{3/2}(\Lambda) = \frac{1}{16}(4\Lambda^2 - 9\xi^2 - 3)^2,\\
&P_2(\Lambda) = \frac{1}{4}(\Lambda + 3\xi)(2\Lambda - 3\xi + 3)(2\Lambda - 3\xi - 3)(\Lambda - 9\xi^2 - 3)^2\\
&P_{5/2}(\Lambda) = (\Lambda^3 - 7\Lambda(3\xi^2 + 1) + 20\xi(\xi^2 - 1))^2.
\end{aligned}
$$

В силу теоремы Крамерса [18, стр. 269] о двукратном вырождении систем с общим полуцелым спином, все $P_j(\lambda)$ с полуцелыми j являются полными квадратами.

Квантовый волчок. Открытые вопросы

Классификация. Описание волчков, допускающих дополнительный интеграл, до сих пор остаётся открытой задачей. Для случая $so(4)$ Веселов получил необходимые условия, выделяющие некоторые многообразия в пространстве параметров (уточнённый результат см. в [12]). В известных примерах число параметров по крайней мере на 1 меньше размерности этих многообразий. Некоторые классификационные результаты приводятся в [22].

Можно ли продвинуться в этой задаче, точнее, в её квантовой версии, используя перевод на язык ДО? Гипотеза о дискриминанте подсказывает, как могут выглядеть необходимые условия.

Спектр для волчков на $so(4)$. Эта задача довольно сложна, использование ДО позволяет в принципе получить рекуррентные соотношения для полиномиальных собственных функций.

[21] A.P. Veselov. On the integrability conditions for the Euler equation on $so(4)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***270:6*** (1983) 1298–1300.

[22] В.В. Соколов. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$. *Доклады Академии Наук* ***394:5*** (2004) 1–4.